

# FACIT till TENTAMEN

Delkurs 3 E & M (5 p), åk.2, MAA 308, lp, 1 ht 2001. Lärare: Yury Shestopalov, rum 3A313, tel 054-7001856 (a)

1. Lös (skriv den exakta lösningen) randvärdesproblemet för en linjär differentialekvation av andra ordningen

$$\begin{cases} y'' - y = -x, & y = y(x), \quad 0 < x < 3, \\ y(0) = 0, & y(3) = 3. \end{cases} \quad (1)$$

**Lösning.** Ekvationen

$$y'' - y = 0 \quad (2)$$

har karakteristiska polynomet

$$r^2 - 1 \quad (3)$$

med nollställena  $r_1 = 1$  och  $r_2 = -1$ . Den fullständiga lösningen  $y_0(x)$  till homogena ekvationen (2) är

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (4)$$

Bestäm en partikulär lösning  $y_p(x)$  till ekvationen (1):

$$y_p = ax + b: \quad y_p'' - y_p = (ax + b)'' - (ax + b) = 0 - ax - b = -x \quad \rightarrow a = 1, b = 0 \quad (5)$$

och  $y_p(x) = 1 \cdot x + 0 = x$

Den fullständiga lösningen till ekvationen (1) blir

$$y = y_0 + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x. \quad (6)$$

Satisfiera randvillkor

$$y(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 + 0 = 0 \rightarrow C_2 = -C_1; \quad (7)$$

$$y(3) = 3 \rightarrow C_1 e^3 - C_1 e^{-3} + 3 = 3, \quad C_1(e^3 - e^{-3}) = 0 \rightarrow C_1 = 0. \quad (8)$$

Den (exakta) lösningen till randvärdesproblemet (1) är

$$y(x) = x. \quad (9)$$

2. Approximera randvärdesproblemet (1) genom att reducera det till ett linjärt ekvationssystem med två obekanta. Approximera derivatan med

$$y'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (10)$$

**Lösning.** Eftersom vi måste få ett ekvationssystem med två obekanta och ekvationen  $y'' - y = -x$  i (1) betraktas i intervallet  $(0,3)$ , är antalet delpunkter  $x_i$  som tillhör  $(0,3)$  lika med två (antalet delintervall är  $2 + 1 = 3$ ), så att de här delpunkterna  $x_i = ih$ ,  $i = 1, 2$ , där  $h = (3 - 0)/3 = 1$ , så att  $x_1 = h = 1$ ,  $x_2 = 2h = 2$ . Approximera differentialoperatoren:

$$y'' - y \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i. \quad (11)$$

Randvärdesproblemet (1) approximeras med

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = -x_i, \quad i = 1, 2; \quad y_0 = 0, \quad y_3 = 3. \quad (12)$$

eller

$$y_{i+1} - (2 + h^2)y_i + y_{i-1} = -h^2x_i, \quad i = 1, 2; \quad y_0 = 0, \quad y_3 = 3; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2. \quad (13)$$

Då får vi två ekvationer

$$\begin{aligned} y_2 - (2 + h^2)y_1 + y_0 &= -h^2x_1 \quad (i = 1), \\ y_3 - (2 + h^2)y_2 + y_1 &= -h^2x_2 \quad (i = 2). \end{aligned} \quad (14)$$

eller

$$\begin{aligned} y_2 - 3y_1 + y_0 &= -1 \quad (i = 1), \\ y_3 - 3y_2 + y_1 &= -2 \quad (i = 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Villkoren  $y_0 = 0$ ,  $y_3 = 3$  ger ett linjärt ekvationssystem med två obekanta  $y_1$ ,  $y_2$

$$\begin{aligned} -3y_1 + y_2 &= -1, \\ y_1 - 3y_2 &= -5, \end{aligned} \quad (16)$$

På matrisform, får vi

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b},$$

där systemetsmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

och högerledet

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

**3.** Lös det linjära ekvationssystemet med två obekanta som approximerar (1) med hjälp av Gusselimination (dvs, beräkna approximativa lösningen). Jämför den här approximativa lösningen med den exakta lösningen.

**Lösning.** Skriv linjära ekvationssystemet med två obekanta som approximerar (1),

$$\begin{aligned} -3y_1 + y_2 &= -1, \\ y_1 - 3y_2 &= -5. \end{aligned} \quad (17)$$

Utför Gusselimination.

Steg 1.

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2/3 &= -1/3, \\ y_1 - 3y_2 &= -5. \end{aligned} \quad (18)$$

Steg 2.

$$\begin{aligned} -3y_1 + y_2 &= -1, \\ 0 + (1/3 - 3)y_2 &= -5 - 1/3. \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} -3y_1 + y_2 &= -1, \\ -8/3y_2 &= -16/3. \end{aligned} \tag{20}$$

Steg 3.

$$\begin{aligned} -3y_1 + 2 &= -1, \\ y_2 &= 2. \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= (-1 - 2)/(-3), \\ y_2 &= 2. \end{aligned} \tag{22}$$

Lösningen till systemet

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 &= 2 \end{aligned}$$

ger den approximativa lösningen till randvärdesproblemet (1).

Den exakta lösningen till randvärdesproblemet (1) är

$$\begin{aligned} y(x_1) &= x_1 = 1, \\ y(x_2) &= x_2 = 2 \end{aligned}$$

och sammanfaller med den approximativa lösningen (i punkter  $x_1, x_2$ ).

**4.** Använd  $(x_i, y_i)$  som interpolationsdata och konstruera en styckvis linjär interpolationsfunktionen  $F(M; x)$  till den approximativa lösningen  $\{y_i\}$  till problemet (1); rita funktionskurvan och beräkna interpolationsfelet (med 3D) i punkten

$$x_{i+0.5} = x_i + 0.5h, \quad i = 1.$$

**Lösning.** Styckvis linjär interpolation utförs genom att vi konstruerar en styckvis linjär interpolationsfunktion  $F(M; x)$  som sammanfaller med  $M + 1$  givna interpolationsvärden. Här  $M = 3$ . I varje intervall  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2$ , där  $(x_k, y_k)$  är interpolationsdata

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) & (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) \\ (0, 0) & (1, 1) & (2, 2) & (3, 3) \end{aligned}$$

(observera, att  $y_1 = 1$  och  $y_2 = 2$  är den approximativa lösningen till randvärdesproblemet (1), som man har bestämt i Problem 3) fås  $F(M; x)$  genom

$$F(M; x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$ :

$$F(M; x) = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) = 0 + \frac{x - 0}{1 - 0}(1 - 0) = x, \quad x \in [0, 1].$$

$k = 1$ :

$$F(M; x) = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) = 1 + \frac{x - 1}{2 - 1}(2 - 1) = x, \quad x \in [1, 2].$$

$k = 2$ :

$$F(M; x) = y_2 + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}(y_3 - y_2) = 2 + \frac{x - 2}{3 - 2}(3 - 2) = x, \quad x \in [2, 3].$$

så att  $F(M; x) = x$  i varje interpolationsintervall  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  och i hela intervallet  $[0, 3]$ .

Interpolationsfelet

$$x_{i+0.5} - F(M; x_{i+0.5}) = 1.5 - F(M; 1.5) = 1.5 - 1.5 = 0.$$

5. Beräkna integralen

$$\int_0^3 y(x) dx$$

med trapets formeln, där  $\{y_i\}$  är den approximativa lösningen till problemet (1).

**Lösning.** Använd interpolationsdata

$$(x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)$$

$$(0, 0) (1, 1) (2, 2) (3, 3)$$

där  $y_1 = 1$  och  $y_2 = 2$  är den approximativa lösningen till randvärdesproblemet (1), som man har bestämt i Problem 3. Enligt trapets formeln

$$\int_0^3 y(x) dx \approx h(0.5y_0 + y_1 + y_2 + 0.5y_3) = 1 \cdot (0 + 1 + 2 + 1.5) = 4.5$$

Observera att den exakta värdet

$$\int_0^3 y(x) dx = \int_0^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 4.5.$$

6. Använd Newtons metod eller fixpunktiteration och beräkna ett positivt nollställe till ekvationen

$$y^3 - 3 = 0,$$

där  $y = y(x)$  är den exakta lösningen till randvärdesproblemet (1).

**Lösning.** Den exakta lösningen till randvärdesproblemet (1 är  $y(x) = x$ . Vi har

$$y^3 - 3 = x^3 - 3.$$

Lös ekvationen

$$f(x) = 0, \quad f(x) = x^3 - 3, \quad f'(x) = 3x^2.$$

med Newtons metod (med 3D och avr.):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3}{3x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

$n$	$x_n$	$x_{n+1} - x_n$
0	2	
1	1.583	0.417
2	1.454	0.129
3	1.442	0.012
4	1.442	0.000

stop

Det positiva nollstället till ekvationen  $x^3 - 3 = 0$  är  $x \approx 1.442$  med 3D.

7. Använd Eulers metod II (tre steg) och lös begynnelsevärdesproblemet

$$z' = -4x - 4z, \quad z(0) = 1, \quad z = z(x),$$

med  $h = 0.1$  (räkna med 3D). Bestäm den exakta lösningen och jämför den approximativa lösningen med den exakta lösningen.

**Lösning.** Bestäm den exakta lösningen. Ekvationen

$$z' + 4z = 0 \tag{24}$$

har karakteristiska polynomet

$$r + 4 \tag{25}$$

med nollstället  $r_1 = -4$ . Den fullständiga lösningen  $z_0(x)$  till den här homogena ekvationen är

$$z_0 = Ce^{-4x}. \tag{26}$$

Bestäm en partikulär lösning  $z_p(x)$ :

$$z_p = ax + b: \quad z'_p + 4z = (ax + b)' + 4(ax + b) = 4ax + (a + 4b) = -4x \rightarrow a = -1, b = 0.25$$

och  $z_p(x) = -x + 0.25$ .

Den fullständiga lösningen till ekvationen (2) blir

$$z = z_0 + z_p = Ce^{-4x} - x + 0.25. \tag{27}$$

Satisfiera begynnelsevillkoret

$$z(0) = 1 \rightarrow C + 0.25 = 1 \rightarrow C = 0.75. \tag{28}$$

Den (exakta) lösningen till randvärdesproblemet (1) är

$$z(x) = 0.75e^{-4x} - x + 0.25. \tag{29}$$

$$z(x_1) = z(0.1) = 0.75e^{-0.4} - 0.1 + 0.25 = 0.653. \tag{30}$$

$$z(x_2) = z(0.2) = 0.75e^{-0.8} - 0.2 + 0.25 = 0.387. \tag{31}$$

$$z(x_3) = z(0.3) = 0.75e^{-1.2} - 0.3 + 0.25 = 0.176. \quad (32)$$

Rekursionsformlerna av Eulers metod II är

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ k_1 &= hf(x_n, z_n) \\ k_2 &= hf(x_{n+1}, z_n + k_1) \end{aligned} \quad (33)$$

$$z_{n+1} = z_n + 1/2(k_1 + k_2) \quad (34)$$

Här  $f(x, z) = -4x - 4z = -4(x + z)$ ,

$$k_1 = 0.1 \cdot (-4(x_n + z_n)) = -0.4(x_n + z_n),$$

$$k_2 = 0.1 \cdot (-4)((x_n + 0.1) + z_n - 0.4(x_n + z_n)),$$

$$z_{n+1} = z_n + 1/2(k_1 + k_2),$$

$$n = 0, 1, 2. \quad x_0 = 0, \quad z_0 = 1.$$

Vi har  $n = 0$  :

$$k_1 = -0.4(x_0 + z_0) = -0.4,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= -0.4((x_0 + 0.1) + z_0 - 0.4(x_0 + z_0)) = \\ &= -0.4(0.1 + 1 - 0.4) = -0.28, \end{aligned} \quad (35)$$

$$z_1 = z_0 + 1/2(-0.4 - 0.28) = 1 - 0.34 = 0.66.$$

$n = 1$  :

$$k_1 = -0.4(x_1 + z_1) = -0.4(0.1 + 0.66) = -0.304,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= -0.4((x_1 + 0.1) + z_1 - 0.4(x_1 + z_1)) = \\ &= -0.4(0.2 + 0.66 - 0.4(0.1 + 0.66)) = -0.4(0.86 - 0.304) = -0.222, \end{aligned} \quad (36)$$

$$z_2 = z_1 + 1/2(-0.304 - 0.222) = 0.66 - 0.263 = 0.397,$$

$n = 2$  :

$$k_1 = -0.4(x_2 + z_2) = -0.4(0.2 + 0.397) = -0.239,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= -0.4((x_2 + 0.1) + z_2 - 0.4(x_2 + z_2)) = \\ &= -0.4(0.3 + 0.397 - 0.4(0.2 + 0.397)) = -0.4(0.697 - 0.239) = -0.183, \end{aligned} \quad (37)$$

$$z_3 = z_2 + 1/2(-0.239 - 0.183) = 0.397 - 0.211 = 0.186.$$

Sätt

$$z = \text{Exakta värden}, \quad \epsilon = \text{fel}$$

och skriv ut beräkningar (med 3D)

$x_n$	$z_n$	$z$	$\epsilon$
0.0	1.000	1.000	0.000
0.1	0.660	0.653	0.007
0.2	0.397	0.387	0.01
0.3	0.186	0.176	0.01

8. Anpass en rät linje till följande data

$t$	$f(t)$
---	---
1	2
2	6
4	3

genom att skriva och lösa motsvarande minsta kvadratproblemet.

**Lösning.** Om vi ansätter den räta linjen  $\tilde{f}(t)$  på formen  $\tilde{f} = c_0 + c_1 t$ , får vi minsta kvadratproblemet med systemet

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= 2 \\ c_0 + 2c_1 &= 6 \\ c_0 + 4c_1 &= 3, \end{aligned}$$

Vi skall lösa minsta kvadratproblemet för det här systemet; systemmatrisen är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2], \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

och

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6+3 \\ 2+12+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1+1 & 1+2+4 \\ 1+2+4 & 1+2 \cdot 2+4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

blir

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ 26 \end{bmatrix},$$

Bestäm determinanter

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{vmatrix} = 14, \quad \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 26 & 21 \end{vmatrix} = 49, \quad \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 26 \end{vmatrix} = 1$$

och lösningen till ormalekvationen enligt Cramers regel:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49/14 = 7/2 \\ 1/14 \end{bmatrix}.$$

Den räta linjen  $\tilde{f} = 7/2 + 1/14t$ .